FOGLIO DI ESERCIZI 8

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

Esercizio 1. Consideriamo sulla retta reale $\mathbb{R}$ la relazione d'equivalenza definita da $x \cong y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. Dimostrare che $Y := \mathbb{R}/\cong$ ha la topologia banale.

Esercizio 2. Considerare sulla retta reale $\mathbb{R}$ la relazione d'equivalenza $\cong$ indotta dalla funzione suriettiva $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = |x|$. Dimostrare che $Y := \mathbb{R}/\cong$ è omeomorfo all'intervallo $[0, +\infty)$.

Esercizio 3. Sia ℓ una retta fissata nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$, e consideriamo la relazione d'equivalenza su $\mathbb{R}^2$ data da $\mathbf{x} \cong \mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ oppure $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono simmetrici rispetto ad ℓ. Dimostrare che $Y := \mathbb{R}^2/\cong$ è omeomorfo ad un semipiano chiuso.

Esercizio 4. Siano $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ due mappe di identificazione topologica. Dimostrare che $g \circ f \colon X \to Z$ è una mappa di identificazione topologica.

Esercizio 5.

(1) Sia X uno spazio topologico, $\cong$ una relazione d'equivalenza su X e $\pi \colon X \to X/\cong$ la proiezione sul quoziente. Se $x \in X$, dimostrare che $\pi(x)$ è un punto chiuso di $X/\cong$ se e solo se la sua classe d'equivalenza $[x]$ è un sottoinsieme chiuso di X.

(2) Sia X uno spazio di Hausdorff, F un sottoinsieme chiuso di X e si definisca una relazione d'equivalenza su X come segue:

$$x \cong y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y & \text{oppure} \\ x, y \in F. \end{cases}$$

Dimostrare che lo spazio quoziente $X/\cong$ è uno spazio T_1.

Suggerimento: per il punto **(1)**, dimostrare che $X - [x]$ è un insieme saturo di X, e che quindi se esso è aperto lo è anche la sua immagine tramite π. Per il punto **(2)**, usare il punto **(1)**.